

1 Teoria dei numeri - base

Esercizi proposti

ESERCIZIO 1.1 Determinare il più piccolo intero positivo con esattamente 12 divisori.

ESERCIZIO 1.2 Siano

$$m = 111.333.333.111 \quad \text{e} \quad n = 111.333.111.666.$$

Quanti sono i divisori di m che non dividono n ?

ESERCIZIO 1.3 Quanti sono i numeri interi positivi minori o uguali a 10000 che hanno un numero pari di divisori?

ESERCIZIO 1.4 Ad un marziano viene fatta vedere l'equazione

$$x^2 - 16x + 41 = 0.$$

Alla domanda su quanto valga la differenza tra le due radici dell'equazione il marziano risponde 10. Quante dita hanno i marziani?

ESERCIZIO 1.5 Determinare il valore delle cifre A, B, C nella moltiplicazione riportata a fianco sapendo che a lettere diverse corrispondono cifre diverse.

$$\begin{array}{r} ABC \times \\ BBB = \\ \hline CCCCC \end{array}$$

ESERCIZIO 1.6 Calcolare il massimo comun divisore tra $2015^2 - 2014^2$ e $2013^2 - 2012^2$.

ESERCIZIO 1.7 Per quali valori interi di n la frazione $\frac{21n+2}{28n+3}$ è irriducibile?

ESERCIZIO 1.8 Siano a, b interi. Dimostrare che $a + 4b$ è multiplo di 13 se e solo se $10a + b$ lo è.

ESERCIZIO 1.9 Siano a, b, c interi. Dimostrare che se $a + b + c$ è multiplo di 6 anche $a^3 + b^3 + c^3$ lo è.

ESERCIZIO 1.10 Determinare gli $n \in \mathbb{N}$ (oppure $\in \mathbb{Z}$) e i primi p tali che $5p + 49 = n^2$.

ESERCIZIO 1.11 Quante sono le terne di numeri interi non negativi tali che $6x + 10y + 15z = 3300$?

ESERCIZIO 1.12 Quanti sono i punti (x, y) del piano con entrambe le coordinate intere situati sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2000^2$?

ESERCIZIO 1.13 Sia x intero. Determinare tutti i numeri interi della forma

$$\text{a) } \frac{x+9}{x+1}; \quad \text{b) } \frac{x^2+3x+1}{x-4}; \quad \text{c) } \frac{x+3}{2x-1}.$$

ESERCIZIO 1.14 Qual è il più grande intero positivo per cui $n^3 + 100$ è divisibile per $n + 10$?

ESERCIZIO 1.15 Determinare tutte le soluzioni reali, comprese tra 0 e 1000 inclusi, dell'equazione

$$x + \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor.$$

ESERCIZIO 1.16 (*) Siano

$$m = 22.228.888 \quad \text{e} \quad n = 22.222.222.$$

Quanti interi positivi dividono sia m che n ?

ESERCIZIO 1.17 (*) Francesco traccia un certo numero m di rette verticali e un certo numero n di rette orizzontali. Le rette sono tali che il numero di regioni limitate in cui è stato diviso il piano sono il doppio delle regioni non limitate.

Quante rette ha tracciato Francesco?

ESERCIZIO 1.18 (*) Per quali valori di n il numero $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$ è un quadrato perfetto?

ESERCIZIO 1.19 (*) Determinare i punti dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2012$ con entrambe le coordinate intere.

ESERCIZIO 1.20 Determinare i punti dell'iperbole di equazione $3x^2 - 2y^2 = 2012$ con entrambe le coordinate intere.

ESERCIZIO 1.21 Determinare quante coppie (a, b) di interi primi tra loro sono tali che $a + b = 2013$.
Nota: le coppie (a, b) e (b, a) sono da considerarsi distinte.

ESERCIZIO 1.22 Determinare i numeri interi uguali al triplo della somma delle proprie cifre.

ESERCIZIO 1.23 Dimostrare che se la cifra delle unità di n^2 è 6 allora la cifra delle decine di n^2 è dispari.

ESERCIZIO 1.24 Siano a, b, c, d, e cifre e sia $n = abcde$ un numero di cinque cifre. Dimostrare che se $41|n$ allora 41 divide tutti i numeri ottenuti da una rotazione circolare delle cinque cifre (cioè che 41 divide anche $bcdea, cdeab, deabc, eabcd$)

ESERCIZIO 1.25 Determinare tutte le coppie di interi di due cifre tali che il loro prodotto non cambia moltiplicando i due numeri ottenuti scambiando le cifre delle unità e delle decine di ciascuno di essi (cioè $AB \cdot CD = BA \cdot DC$ dove A, B, C, D sono le cifre dei due numeri).

ESERCIZIO 1.26 Quanto vale la somma delle cifre di n^2 quando $n = 999.999.999.999.999.995$?

ESERCIZIO 1.27 Determinare i numeri di 4 cifre che hanno la prima cifra uguale alla terza, la seconda uguale alla quarta e tali che il prodotto delle cifre del numero divide il quadrato del numero stesso.