CURRICULUM in MATHEMATICS
Examination 3

Applicants are required to do some of the following exercises

Exercise 1. For $n > 1$, let A be a real, $n \times n$, skew-symmetric matrix. Prove that if A is invertible, then:

(a) n is even;
(b) all the eigenvalues of A are nonzero and purely imaginary.

Exercise 2. Give the definition of *Unique Factorization Domain.* Let D be a Unique Factorization Domain: prove that the polynomial ring $D[x]$ is a Principla Ideal Domain if and only is D is a field.

Exercise 3. A group G is *residually finite* if the intersection of all normal subgroups of finite index of G is trivial (i.e. $\{1_G\}$).

(a) Show that the group G is residually finite if and only if for each $1 \neq x \in G$ there exists a finite group F and a homomorphism $\phi : G \to F$ such that $\phi(x) \neq 1$.
(b) Let $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Prove that the group $GL(n, \mathbb{Z})$ of all invertible $n \times n$ matrices with entries in $\mathbb{Z}$ is residually finite.
(c) Show that the group $GL(n, \mathbb{C})$ it is not residually finite.

Exercise 4. Write the definition of *asymptotic direction* at a point p of a differentiable surface in the space $\mathbb{R}^3$. Let S be a connected, differentiable surface in the space $\mathbb{R}^3$ such that, at any point p of S, there are three distinct open line segments passing through p and all entirely contained in S.

(a) Prove that S is a planar surface;
(b) find, if it exists, an example of a non planar, differentiable surface M in $\mathbb{R}^3$ such that, at any point p of M there are two distinct straight lines passing through p and both entirely contained in M.

Exercise 5. Let X be a (arcwise connected) topological space, and let $\Pi(X, x_0)$ be the Fundamental Group of X at x_0.

(a) Write the explicit construction of the *inverse* of a given element of $\Pi(X, x_0)$.

Consider $\mathbb{R}^3$ endowed with the Euclidean topology. Consider the torus T obtained by rotating the circle $C = \{(x, y, z) : z^2 + (y-2)^2 = 1,\ x = 0\}$ around the z-axis. Let D be the disc $\{(x, y, z) : z = 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Compute the Fundamental Group of:

(b) T;
(c) $T \cup D$;
(d) $T \cap \{(x, y, z) : y \leqslant 2\}$.

Exercise 6. Within the framework of the Lebesgue integration theory state the comparison theorem and some other properties considered to be relevant.

Put $f(x) = \log \sin x$ and prove that

(a) f is integrable in $]0, \pi/2]$ and $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$;
(b) $\displaystyle \mathscr{I} = \int_0^{\pi} \log \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$;
(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin(2x) dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + \mathscr{I}$;
(d) $\mathscr{I} = -\pi \log 2$.

Exercise 7. In the theory of first order ordinary differential equations describe briefly the definitions of *maximal* and *global* solution. State at least one sufficient condition in order that a maximal solution is also global.

Given the Cauchy problem $\begin{cases} y' = |x| y \arctan y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ you are asked to

(a) prove that it admits a unique global solution y;
(b) show that y is increasing and evaluate $\lim_{x \to \mp\infty} y(x)$;
(c) evaluate $\int_{-\infty}^{0} y'(x)dx$.

Exercise 8. In mid-September 2013 the crew of New Zeeland led 8 to 1 on Oracle in the America's cup race. It is known that the crew who first gets 9 victories is going to take the cup. Oracle won the cup on September 26. What kind of fair bet would have been necessary to deal with in mid-September on the Oracle winning event ?

The candidate consider the random variables $V_k = min\{n \in \mathbb{N},\ Y_n = k\}$, where $Y_n = \sum_1^n X_j$ and $X_j,\ j = 1, \cdots, n$ is a sequence of Bernoulli trials with success parameter p.

Then find

(a) the distribution function of V_1;
(b) the distribution function of V_k;
(c) the expected value $E(V_k)$.

Exercise 9. Let us consider the bidimensional random variable (X, Y) having

$$f(x, y) = \frac{k}{x^2 y^2}, \quad 0 < k \leqslant 1, \ \ x \geqslant a, \ y \geqslant b, \ \ a, b \in \mathbb{N}$$

as joint distribution.

Let us put $\omega = XY, \ \ \tau = \dfrac{X}{Y}$.

After computing k, a, b, find the joint distribution of the random vector (ω, τ) and study the (possible) independence of ω and τ.

Exercise 10. A point P is constrained to move without friction along a paraboloid of revolution with axis x, whose parabolic cross-section is $y^2 - 2px = 0$, and is attracted towards a fixed point $A = (a, b)$ in the xy–plane by a force proportional to the distance $\overline{AP}$ (see fig. 1). Assuming $a > p$, find

(a) the equilibrium positions and study their stability when A belongs to the axis of the paraboloid,
(b) the reaction force from the paraboloid at P when the point ocupies the equilibrium positions.

Exercise 11. In the vertical plane Oxy let us consider the system formed by a rigid homogeneous rectangular triangle ABD with mass m and sides $AB = 3R\sqrt{3}/2$, $AD = 3R/2$ such that AD can slide without friction on Ox plus a rigid homogeneous circle with radius R and mass m too (see fig. 2). The circle can roll without slipping on Oy and is constrained to cross a small ring fixed in D. Besides gravity, a couple is applied to the circle with torque $\mathbf{M} = \beta \dfrac{mg}{R}(D - G) \times (C - G)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$.

Define C to be the contact point of the circle with the $0y$ axis and assume as lagrangian coordinate the angle $\vartheta = \widehat{CGD} \in [0, 2\pi)$.

(a) Find the relation between the rolling angle φ of the disk and the angle ϑ;
(b) find the equilibrium positions of the system analyzing their stability with respect to β;
(c) write the differential equation of motion.

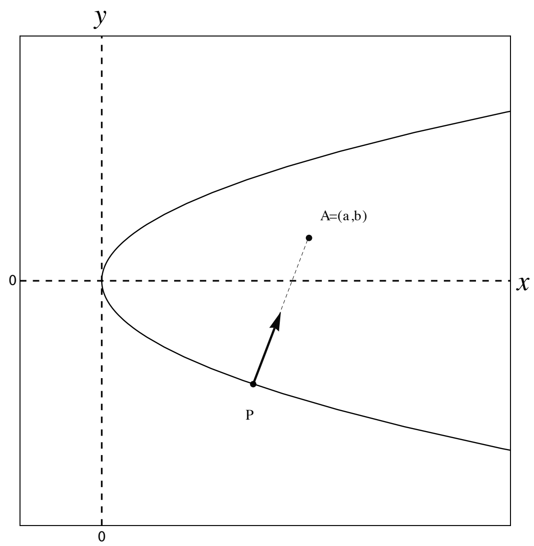

FIGURE 1

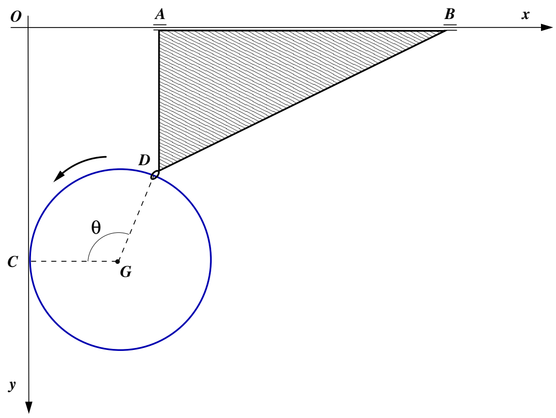

FIGURE 2

Exercise 12. Consider the differential equation

$$y' = Ay + b,$$

with

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Compute the equilibrium point and discuss its stability properties.

Exercise 13. Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compute its condition number by using the 1-norm and ∞-norm.

CURRICULUM in MATEMATICA
Prova 3

Si richiede ai candidati di svolgere alcuni dei seguenti esercizi

Esercizio 1. Per $n > 1$, sia A una matrice reale, antisimmetrica, $n \times n$. Provare che se A è invertibile, allora:

(a) n è pari;
(b) tutti gli autovalori di A sono non nulli e puramente immaginari.

Esercizio 2. Si dia la definizione di *dominio a fattorizzazione unica.* Sia D un dominio a fattorizzazione unica: si dimostri che l'anelllo dei polinomi ad una indeterminata $D[x]$ è un dominio a ideali principali se e soltanto se D è un campo.

Esercizio 3. Un gruppo si dice *residualmente finito* se l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito di G è il sottogruppo banale $\{1_G\}$.

(1) Si provi che un gruppo G è residualmente finito se e soltanto se per ogni $1 \neq x \in G$ esiste un gruppo finito F ed un omomorfismo $\phi : G \to F$ tale che $\phi(x) \neq 1$.
(2) Sia $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Si provi che il gruppo $GL(n, \mathbb{Z})$ (gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine n a coefficienti in $\mathbb{Z}$) è residualmente finito.
(3) Si provi che il gruppo $GL(n, \mathbb{C})$ non è residualmente finito.

Esercizio 4. Scrivere la definizione di *direzione asintotica* in un punto p di una superficie differenziabile nello spazio $\mathbb{R}^3$. Sia S una superficie differenziabile, connessa nello spazio $\mathbb{R}^3$ tale che, in ogni punto p di S, esistono tre segmenti aperti di retta che passano per p e che sono tutti interamente contenuti in S.

(a) Provare che S è una superficie piana;
(b) trovare, se esiste, un esempio di una superficie differenziabile non piana M in $\mathbb{R}^3$ tale che, in ogni punto p di M esistono due rette distinte che passano per p e ambedue contenute interamente in M.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico (connesso per archi), e sia $\Pi(X, x_0)$ il gruppo fondamentale di X in $x_0 \in X$.

(a) Scrivere la definizione esplicita degli elementi di $\Pi(X, x_0)$.

Sia $\mathbb{R}^3$ dotato della topologia euclidea. Considerare il toro T ottenuto ruotando la circonferenza $C = \{(x, y, z) : z^2 + (y - 2)^2 = 1,\ x = 0\}$ attorno all'asse delle z. Sia D il disco $\{(x, y, z) : z = 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Calcolare il gruppo fondamentale di:

(b) T;
(c) $T \cup D$;
(d) $T \cap \{(x, y, z) : y \leqslant 2\}$.

Esercizio 6. Nell'ambito della teoria di integrazione alla Lebesgue enunciare il teorema del confronto e altre proprietà ritenute importanti.

Posto $f(x) = \log \sin x$, si chiede di dimostrare che

(a) f è integrabile in $]0, \pi/2]$ e $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$;
(b) $\displaystyle\mathscr{I} = \int_0^{\pi} \log \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$;
(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin(2x) dx = \frac{\pi}{2} \log 2 + \mathscr{I}$;
(d) $\mathscr{I} = -\pi \log 2$.

Esercizio 7. Nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale, descrivere brevemente il concetto di soluzione *massimale* e quello di soluzione *globale* ed enunciare almeno una condizione sufficiente affinché una soluzione massimale sia globale.

Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = |x| y \arctan y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ si chiede di:

(a) dimostrare che esso ammette un'unica soluzione globale y;
(b) verificare che y è monotona crescente e calcolare $\lim_{x \to \mp\infty} y(x)$;
(c) calcolare $\int_{-\infty}^{0} y'(x)dx$.

Esercizio 8. A metà settembre 2013 l'equipaggio di New Zeeland conduceva per 8 gare a 1 nei confronti di Oracle nella competizione denominata Coppa America. È noto che vince la Coppa chi per primo arriva a 9 vittorie: il 26 settembre Oracle ha vinto la Coppa. Quale sarebbe stato l'importo equo di una scommessa fatta su tale esito a metà settembre ?

Il candidato consideri poi la variabile aleatoria $V_k = min\{n \in \mathbb{N},\ Y_n = k\}$, in cui $Y_n = \sum_{1}^{n} X_j$ e $X_j,\ j = 1, \cdots, n$ è una successione di prove di Bernoulli con parametro (probabilità di successo) p. Si calcoli quindi:

(a) la funzione di distribuzione della variabile aleatoria V_1;
(b) la funzione di distribuzione delle variabili aleatorie V_k;
(c) il valore atteso $E(V_k)$.

Esercizio 9. Consideriamo il vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) che ha la funzione

$$f(x, y) = \frac{k}{x^2 y^2}, \quad 0 < k \leqslant 1, \ \ x \geqslant a, \ y \geqslant b, \ \ a, b \in \mathbb{N}$$

come distribuzione congiunta. Poniamo $\omega = XY, \quad \tau = \frac{X}{Y}$. Dopo aver determinato i valori di k, a, b, si calcoli la distribuzione congiunta del vettore aleatorio (ω, τ) e si studi l'indipendenza (o meno) delle variabili aleatorie ω e τ.

Esercizio 10. Un punto P è vincolato a muoversi senza attrito sopra un paraboloide rotondo di asse x, la cui parabola mediana ha equazione $y^2 - 2px = 0$, ed è attratto verso un punto fisso $A = (a, b)$ del piano xy da una forza proporzionale alla distanza (vedere fig. 1). Supposto $a > p$, determinare

(a) le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità nel caso in cui A stia sull'asse del paraboloide;
(b) la reazione vincolare in corrispondenza delle posizioni di equilibrio.

Esercizio 11. Nel piano verticale Oxy si consideri il sistema materiale pesante costituito da un triangolo rettangolo omogeneo ABD , di massa m e cateti $AB = 3R\sqrt{3}/2$, $AD = 3R/2$, scorrevole senza attrito con il lato AB su Ox , e da una circonferenza omogenea , di massa m e raggio R , che rotola senza strisciare su Oy ed è vincolata a passare per un anellino saldato in D (vedere fig. 2). Oltre alle forze peso, sul sistema agisce una coppia applicata alla circonferenza di momento $\mathbf{M} = \beta \frac{mg}{R}(D - G) \times (C - G)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$. Detto C il punto di contatto della circonferenza con l'asse $0y$, si assuma come variable lagrangiana l'angolo $\vartheta = \widehat{CGD} \in [0, 2\pi)$.

Si chiede:

(a) di determinare la relazione che lega l'angolo di rotolamento φ del disco con l'angolo ϑ,
(b) di determinare le posizioni di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità al variare di β ;

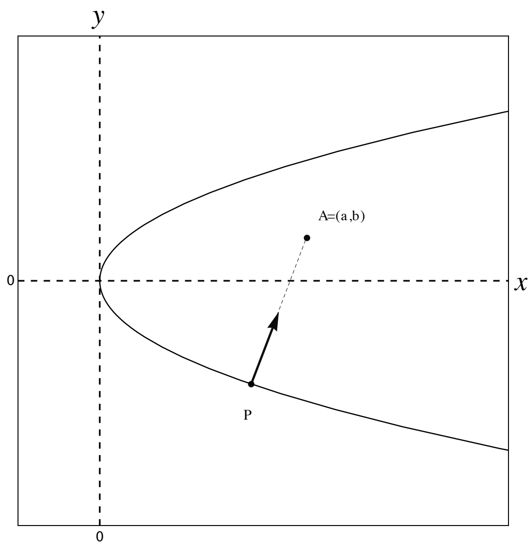

FIGURA 1

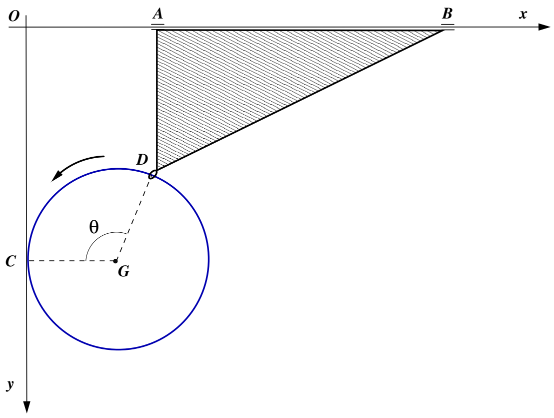

FIGURA 2

(c) di scrivere l'equazione differenziale del moto.

Esercizio 12. Sia data l'equazione differenziale

$$y' = Ay + b,$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolarne il punto di equilibrio e discuterne le proprietà di stabilità.

Esercizio 13. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il numero di condizionamento di A in norma 1 e norma ∞.