Simulazione Cesenatico 1

Aprile 2016

Nota: Gli esercizi **non** sono in ordine di difficoltà.

Esercizio 1

Si consideri un quadrilatero $ABCD$ con due lati paralleli. Siano M ed N i punti medi rispettivamente dei lati CD e BC e sia P il punto di intersezione tra AM e DN. Dimostrare che se $\dfrac{PM}{AP} = \dfrac{1}{4}$ allora $ABCD$ è un parallelogramma.

Esercizio 2

Sia n un intero positivo e sia D l'insieme del piano formato da n circonferenze concentriche.
Dimostrare che se la funzione $f\colon D \to D$ è tale che $d(f(A), f(B)) \geq d(A, B)$ per ogni coppia di punti $A, B \in D$ allora vale $d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Esercizio 3

Dimostrare che per ogni $x, y, x > 0$ tali che $xyz = 1$ si ha:

$$\frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6} \geq 2.$$

Esercizio 4

Si consideri un triangolo ABC acutangolo e tale che $AB = AC$. Preso un punto P interno al triangolo si tracci la circonferenza di centro A e raggio AP e si indichino con M ed N le intersezioni della circonferenza con AB e AC rispettivamente.
Determinare la posizione del punto P in modo che $MN + BP + CP$ sia minima.

Esercizio 5

Determinare tutti i primi p, q tali che $2p^q - q^p = 7$.

Esercizio 6

In una scacchiera 8x8 chiamiamo "trasversale" un insieme di 8 caselle tale che ogni riga ed ogni colonna contenga esattamente una casella dell'insieme.
Disponiamo delle pedine nella scacchiera in modo che ogni trasversale ne contenga esattamente due. Dimostrare che esistono due righe o due colonne della scacchiera che contengono tutte le pedine.