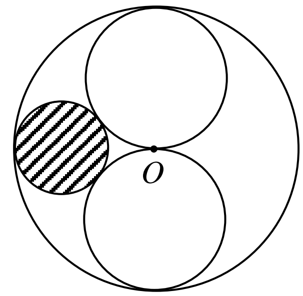
2 Geometria – base
Esercizi proposti

1. Dato un triangolo isoscele ABC e preso un punto M sulla base AB si tracciano le perpendicolari a BC e AC passanti per M, che intersecano BC e AC in D ed E. Dimostrare che, al variare di M, $MD + ME$ è costante.

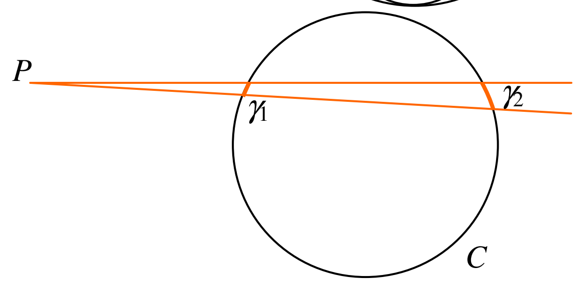
2. Nella figura a lato, le quattro circonferenze sono a due a due tangenti tra loro. Se il cerchio grande ha centro in O e raggio 1, qual è il raggio del cerchio più piccolo?



3. In un triangolo ABC i sei punti usati per dividere ogni lato in tre parti uguali si trovano su una circonferenza. Provare che ABC è equilatero.

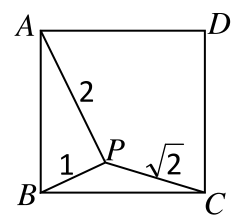
4. Siano C_1 e C_2 due circonferenze passanti per i punti A e B. Sia t una tangente comune alle due circonferenze e siano C e D i suoi due punti di tangenza. Dimostrare che CD è dimezzato dalla retta passante per A e B.

5. Un triangolo ha due mediane ortogonali di lunghezza 10 e 15. Cosa possiamo determinare di questo triangolo?

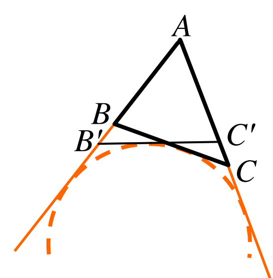


6. Dato un cerchio C ed un punto esterno P, consideriamo una coppia di rette secanti C uscenti da P che formano un angolo di 5°. Se i due archetti γ_1 e γ_2 in figura misurano rispettivamente 2 e 4 centimetri, qual è la lunghezza del raggio di C?

7. All'interno di un quadrato di vertici A, B, C e D, il punto P si trova a distanza 2, 1 e $\sqrt{2}$ dai vertici A, B e C, rispettivamente. Determinare la distanza di P da D e la lunghezza del lato del quadrato?

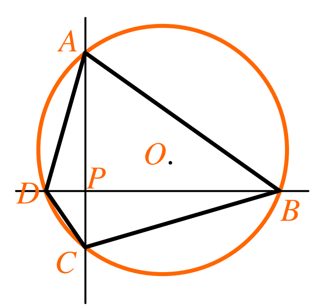


8. Siano C_1 e C_2 due circonferenze passanti per i punti A e B. Preso un punto P su C_1 si considerano i punti M ed N intersezioni di C_2 con le rette PA e PB (in generale M ed N sono distinti da A e B, a meno che le rette per PA e PB non siano tangenti a C_2). Dimostrare che la lunghezza della corda MN non dipende dalla scelta di P.



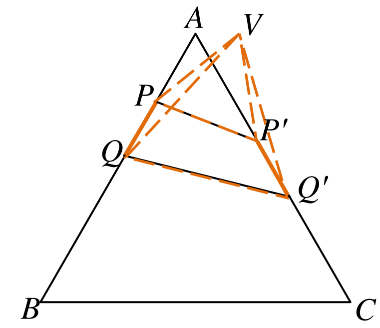
9. In un triangolo ABC prolunghiamo i lati AB e AC come in figura. La circonferenza exscritta al triangolo ABC rispetto al lato BC, è la circonferenza esterna al triangolo, tangente il lato BC e i due prolungamenti considerati. Dimostrare che i due triangoli ABC e $AB'C'$ in figura, con lo stesso angolo in A e la stessa circonferenza exscritta, hanno lo stesso perimetro.

10. Dimostrare che in un quadrilatero ciclico (cioè inscritto in una circonferenza) due lati opposti sono paralleli se e solo se gli altri due sono uguali. Dimostrare che in un esagono ciclico convesso, se due coppie di lati opposti sono paralleli, allora anche la terza coppia di lati opposti è costituita da lati paralleli. In un ottagono ciclico convesso, se tre coppie di lati opposti sono paralleli, allora cosa possiamo dire della quarta coppia?



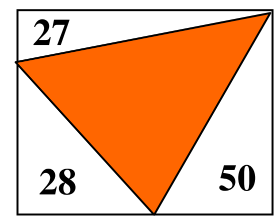
11. Dati un cerchio di centro O ed un suo punto interno P, si considerano due rette per P perpendicolari tra loro. Indicate come in figura con A, B, C e D le intersezioni di tali rette con la circonferenza, dimostrare che la somma degli archi AD e BC è uguale alla somma degli archi AB e CD. Dimostrare inoltre che la distanza di ogni lato del quadrilatero $ABCD$ dal centro del cerchio è pari alla metà della lunghezza del suo lato.

12. Presi i lati di un triangolo come basi, costruiamo tre rettangoli ciascuno con altezza metà della base. L'esagono che si viene a formare con i sei nuovi vertici disegnati ha chiaramente tre lati uguali ai lati del triangolo di partenza. Dimostrare che gli altri tre sono uguali e perpendicolari alle mediane del triangolo.

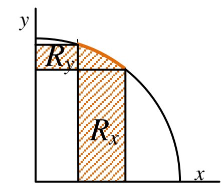


13. Dato un triangolo equilatero ABC, consideriamo due segmenti, PQ e $P'Q'$, di ugual lunghezza contenuti rispettivamente in AB e AC. Dimostrare che se V è il punto tale che $PP'V$ è un triangolo equilatero esterno al quadrilatero $BCP'P$, allora anche $QQ'V$ è equilatero. Dimostrare che la distanza del punto V dal lato BC non dipende dalla scelta dei segmenti PQ e $P'Q'$.

14. Il rettangolo in figura è scomposto in quattro triangoli, di cui tre chiaramente rettangoli ed uno colorato. Le aree dei tre triangoli rettangoli sono 27, 28 e 50. Possiamo determinare l'area del rettangolo? Possiamo determinarne il perimetro?

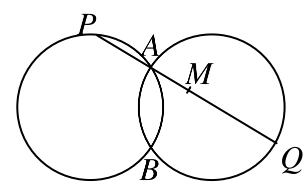


15. Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un suo punto interno. Indichiamo con D, E e F i baricentri dei triangoli BCP, ACP e ABP, rispettivamente. Dimostrare che il triangolo DEF è equilatero e che la sua area non dipende dalla scelta di P. Se il triangolo ABC non è equilatero, cosa possiamo concludere sul triangolo DEF?

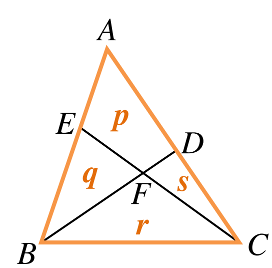


16. Preso il quarto di circonferenza ed un arco su di essa, consideriamo la regione R_x del piano compresa tra l'arco e la sua proiezione sull'asse delle ascisse. Analogamente consideriamo la proiezione sull'asse delle ordinate e la corrispondente regione R_y. Dimostrare che la somma delle aree di queste due regioni non dipende dalla posizione dell'arco considerato, ma solo dalla sua lunghezza.

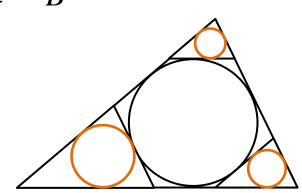
17. Due circonferenze di ugual raggio si intersecano nei punti A e B. Per ogni retta r passante per A consideriamo, come in figura, i due ulteriori punti P e Q d'intersezione con le due circonferenze ed il loro punto medio M. Al variare della retta r, il punto M descrive un luogo geometrico. Quale? Quale sarebbe il luogo dei punti M se le due circonferenze iniziali non avessero lo stesso raggio?



18. Un triangolo ABC è diviso in quattro parti dai segmenti BD e CE. Indichiamo con F l'intersezione dei due segmenti e con p, q, r e s rispettivamente le aree delle regioni $AEFD$, BFE, BCF e CDF. Dimostrare che se $p = q = s$ allora $BE = 2\,AE$.

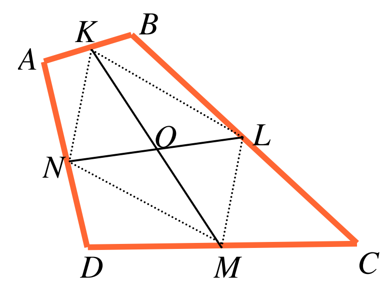


19. Preso un punto P sul lato BC, il segmento AP divide il triangolo ABC in due triangoli. Consideriamo le circonferenze inscritte nei triangoli ABP e APC. Dimostrare che queste circonferenze hanno lo stesso raggio se e solo se P appartiene alla circonferenza inscritta nel triangolo ABC.



20. Dato un triangolo ed il suo cerchio inscritto, tracciamo le tangenti al cerchio parallele ai lati del triangolo. Consideriamo i tre piccoli triangoli che si vengono a formare nel triangolo dato ed i loro cerchi inscritti. Dimostrare che la somma dei raggi dei tre cerchi piccoli è uguale al raggio del cerchio iniziale.

21. Dati due punti distinti A e B nel piano, determinare l'insieme dei punti P tali che $PA = 2\,PB$.



22. Sia ABCD un quadrilatero convesso. Indichiamo, come in figura, con K, L, M e N i punti medi dei lati ed infine con O l'intersezione tra i segmenti KM e LN. Dimostrare che

Area(KLMN) = Area(AKON) + Area(CMOL) = Area(ABCD)/2 .