

3 Combinatoria – base

Esercizi proposti

1. Quanti sono i monomi nelle variabili x, y, z e t aventi coefficiente 1 e grado minore o uguale a 10?
2. Quale posizione occupa la parola MONOCOLO nella lista di tutti i suoi anagrammi (compresi quelli senza senso) messi in ordine alfabetico?
3. Determinare la probabilità che tra 30 persone almeno due festeggino il compleanno lo stesso giorno.
4. Sia N l'insieme dei numeri naturali minori o uguali a 100. Quanti sono i sottoinsiemi di N in cui il secondo più piccolo numero è 20?
5. Quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di un cubo C e non giacciono su una faccia di C ?
6. Quanti sono i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ formati da 30 numeri di cui mai due consecutivi?
7. In quanti modi diversi possiamo colorare le facce di un cubo usando solo due colori? Due modi si considerano uguali se i due cubi sono indistinguibili anche dopo una qualsiasi rotazione.
8. Vogliamo scrivere in ciascuna casella di una tabella 3×3 un numero tra -1, 0 e 1 in modo che la somma in ogni riga e colonna sia 1. Quante configurazioni diverse sono possibili?
9. Dimostrare la relazione $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, per ogni n intero positivo.
10. Consideriamo una scacchiera 8×8 e gli 81 vertici delle caselle. Quanti quadrati distinti hanno i loro vertici su 4 degli 81 punti considerati e i lati paralleli ai lati della scacchiera? E se non chiedessimo che i lati siano paralleli ai lati della scacchiera?
11. Consideriamo nel piano cartesiano un quadrato con i lati paralleli agli assi cartesiani e con due vertici nei punti $A = (0,0)$ e $B = (10,10)$. Partendo da A arriviamo a B con 20 passi, dove ogni passo aumenta di 1 una sola coordinata del punto in cui siamo. Quanti percorsi di 20 passi non vanno mai sopra la diagonale AB ?
12. Consideriamo nello spazio cartesiano un cubo di lato 3 con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani e con due vertici nei punti $A = (0,0,0)$ e $B = (3,3,3)$. Partendo da A arriviamo a B con 9 passi, dove ogni passo aumenta di 1 una sola coordinata del punto in cui siamo. Quanti percorsi di 9 passi rimangono sulla superficie del cubo?
13. Quante sono le permutazioni di n elementi senza punti fissi?
14. Quanti sono i numeri palindromi (che si leggono uguali da destra a sinistra) di sette cifre con la seconda cifra pari e multipli di 3?
15. Dimostrare che comunque si scelgano $n + 1$ numeri interi positivi minori o uguali a $2n$ ne esistono due primi tra loro e due, di cui uno multiplo dell'altro.
16. Quanti cammini minimi congiungono due angoli opposti di una scacchiera 8×8 senza passare dalle quattro caselle centrali?