

# Colorazioni, parità e metodi vari

## Esercizi proposti

1. Un rettangolo è ricoperto di tessere  $1 \times 4$  e  $2 \times 2$ . Dimostrare che non si può sostituire una mattonella con una dell'altro tipo.
2. Per quali valori di  $n$  una scacchiera  $n \times n$  privata dei quattro vertici può essere ricoperta da tessere ?
3. Una scacchiera  $7 \times 7$  è ricoperta da 16 tessere  $3 \times 1$  e da un quadratino  $1 \times 1$ . In quali posizioni può stare il quadratino?
4. Una scacchiera  $6 \times 6$  è ricoperta con tessere  $2 \times 1$ . Mostrare che esiste una retta che taglia la scacchiera senza tagliare alcuna tessera.
5. Quanti pezzi  $1 \times 1 \times 4$  possono essere disposti al massimo in una scatola  $6 \times 6 \times 6$  ?
6. In una scacchiera  $4 \times 8$ , un cavallo può fare un giro passando una e una sola volta da ogni casella?
7. Consideriamo un solitario con le comuni carte di un mazzo da quaranta. Disponiamo tutte le carte a faccia in giù in modo che si formino quattro file orizzontali di dieci carte e dieci file verticali di quattro carte ciascuna. Il gioco si svolge con un solo tipo di mossa: scelta una fila orizzontale o verticale giriamo tutte le carte di quella fila (scoprendo quelle a faccia in giù e riponendo a faccia in giù quelle già scoperte). Possiamo lasciare una sola carta scoperta dopo un certo numero di mosse? Possiamo lasciarne soltanto due scoperte?
8. In un poligono regolare di  $2n$  lati chiamiamo diagonali i segmenti congiungenti due vertici, anche se alcuni di essi sono proprio i lati. Queste diagonali non hanno tutte la stessa lunghezza; le possibili lunghezze sono  $n$ . E' possibile accoppiare i vertici di un decagono regolare con cinque diagonali di lunghezze diverse? E' possibile accoppiare i vertici di un dodecagono regolare con sei diagonali di lunghezze diverse?
9. Supponiamo di avere scritto i numeri da 1 a 90 su altrettanti foglietti. Estraiamo a caso due foglietti ed eliminiamo quello con il numero pari, se l'altro è dispari. Se troviamo due numeri pari eliminiamo il più grande. Se invece troviamo due numeri dispari, allora li togliamo entrambi ed aggiungiamo un nuovo foglietto con scritta la somma dei due numeri eliminati. Procediamo così fino a lasciare un solo foglietto. Qual è il numero più grande che può essere scritto sull'ultimo foglietto rimasto?
10. Senza l'uso della calcolatrice e senza calcolarne esplicitamente il valore, dimostrare che  $2^{99}$  ha almeno quattro cifre uguali nella usuale scrittura in base dieci.
11. In una scatola ci sono  $a$  palline arancioni,  $b$  palline bianche e  $c$  palline celesti. Possiamo prendere due palline di colore diverso e sostituirle con una pallina del terzo colore. Ripetendo l'operazione, possiamo lasciare nella scatola una sola pallina? (Determinare condizioni su  $a$ ,  $b$  e  $c$ )
12. In una scatola ci sono  $a$  palline arancioni,  $b$  palline bianche e  $c$  palline celesti. Possiamo prendere due palline di colore diverso e sostituirle con due palline del terzo colore. Ripetendo l'operazione, possiamo far diventare tutte le palline nella scatola di un solo colore? (Determinare condizioni su  $a$ ,  $b$  e  $c$ )
13. Partendo dal numero  $7^{2015}$ , cancelliamo la prima cifra e sommiamola al numero rimanente. Continuiamo in questo modo fino a che non rimane un numero di 10 cifre. Dimostrare che ha due cifre uguali.