

Incontri olimpici 2014

Esercizi sui polinomi

24 gennaio 2015

Proprietà elementari sui polinomi: divisione, fattori e resti, radici e coefficienti

Esercizio 1

Determina il resto della divisione di $p(x)$ per $q(x)$ quando:

1. $p(x) = (x + 3)^5 + (x + 2)^8 + (5x + 9)^{1997}$, $q(x) = x + 2$.

2. $p(x) = x^{51} + 51$, $q(x) = x + 1$.

3. $p(x) = x^{13} + 1$, $q(x) = x - 1$.

Esercizio 2

- Il polinomio $p(x)$ ha resto 99 se diviso per $x - 19$, resto 19 se diviso per $x - 99$. Quanto vale il resto della divisione di $p(x)$ per $(x - 19)(x - 99)$?
- Un polinomio $p(x)$ dà resto -2 se diviso per $x - 1$, resto -4 se diviso per $x + 2$. Determinare il resto della divisione di $p(x)$ per $x^2 + x - 2$.

Esercizio 3

Se $p(x)$ è un polinomio di grado 3 con $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$. Determinare $p(6)$.

Esercizio 4

Quanto devono valere a e b affinché $x^2 - x - 1$ sia un fattore di $ax^3 + bx^2 + 1$?

Esercizio 5

Supponiamo che $p(x)$ sia un polinomio lineare e $p(6) - p(2) = 12$. Quanto vale $p(12) - p(2) = 2$?

Esercizio 6

Per quanti valori del coefficiente a le equazioni $x^2 + ax + 1 = 0$ e $x^2 - x - a = 0$ condividono una stessa radice?

Esercizio 7

Le equazioni $1988x^2 + ax + 8891 = 0$ e $8891x^2 + ax + 1988 = 0$ hanno in comune una radice, dove $a \in \mathbb{Z}$. Determinare a .

Esercizio 8

Determina il resto di $x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ quando è diviso per $x^3 - x$.

Esercizio 9

Il polinomio $p(x)$ soddisfa $p(-x) = -p(x)$ per ogni x . Se $p(x)$ è diviso per $x - 3$, il resto è 6. Determinare il resto della divisione del polinomio per $x^2 - 9$.

Esercizio 10

Sia $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5$, dove a, b, c sono costanti. Se $f(-7) = 7$, quanto vale $f(7)$?

Esercizio 11

Sia $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Determinare il resto di $f(x^5)$ per $f(x)$.

Esercizio 12

Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$, sapendo che $ab = 10$, quanto vale $c(a + b)$?

Esercizio 13

Il polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1$ ha quattro radici a, b, c, d . Quanto vale $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Esercizio 14

Se $P(x)$ è un polinomio in x e $x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9) \cdot P(x)$, per ogni valore di x , calcola la somma dei coefficienti di $P(x)$.

Esercizio 15

Quanto vale la somma dei reciproci delle radici di $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)?

Esercizio 16

Quale è il prodotto delle radici reali dell'equazione

$$x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}?$$

Esercizio 17

Sia $p(x)$ un polinomio i cui coefficienti valgono soltanto 0 o 1. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (a) $P(2)$ non può valere 51
- (b) $P(3)$ non può valere 37
- (c) $P(3)$ non può valere 92
- (d) $P(4)$ non può valere 20
- (e) $P(5)$ non può valere 150.

Esercizio 18

L'equazione $x^2 + mx + n = 0$ ha radici doppie di $x^2 + px + m = 0$, dove n, m, p non sono nulli. Quanto vale $\frac{n}{p}$?

Esercizio 19

Siano a, b radici dell'equazione $x^2 - mx + 2 = 0$ Supponiamo che $a + \frac{1}{b}$ e $b + \frac{1}{a}$ siano radici dell'equazione $x^2 - px + q = 0$. Quanto vale q ?

Esercizio 20

Il polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ha la proprietà che la media delle radici, il loro prodotto e la somma di tutti i coefficienti del polinomi sono quantità uguali. Inoltre il grafico di $y = p(x)$ interseca l'asse y a quota 2. Quanto vale b ?

Esercizio 21

Supponiamo che $P\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. Quanto vale la somma di tutti i valori di x per cui $P(3x) = 27$?

Esercizio 22

Il prodotto di due delle quattro radici dell'equazione:

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

vale -32 . Determinare k .

Esercizio 23

Determinare il polinomio di grado minimo le cui radici sono i reciproci delle radici di $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 9$.

Esercizio 24

Determinare il polinomio di grado minimo le cui radici sono il doppio delle radici del polinomio $p(x)$ dell'esercizio precedente.

Esercizio 25

Le radici del polinomio $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62 = 0$ sono a, b, c . Determinare il valore di:

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}$$

Esercizio 26

Se a, b, c, d sono le soluzioni dell'equazione $x^4 - mx - 3 = 0$, trovare il polinomio con coefficiente direttore 3 le cui radici sono: $\frac{a+b+c}{d^2}, \frac{a+b+d}{c^2}, \frac{a+c+d}{b^2}, \frac{b+c+d}{a^2}$.

Esercizio 27

Siano r, s, t le radici dell'equazione $x^3 - 6x^2 + 5x - 7 = 0$. Determina:

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{t^2}.$$

Esercizio 28

Se $p(x)$ è un polinomio di grado n tale che $p(k) = \frac{1}{k}$, per ogni $k = 1, 2, \dots, n+1$, determina $p(n+2)$.