Prova di ammissione al Corso di Dottorato di Ricerca in Matematica, Informatica e Statistica – ciclo XXXIII

Curriculum in Matematica

COMPITO n. 3

Esercizio 1. Sia A un dominio d'integrità di caratteristica 2, e sia T l'insieme delle radici dell'unità in A, cioè

$$T = \{a \in A \mid \exists n \geq 1 : \; a^n = 1\}.$$

Si assuma che T è finito.

(a) Si provi che, rispetto al prodotto in A, T è un gruppo ciclico di ordine dispari;

(b) si provi che se $A \setminus T$ è un ideale di A allora A è un campo.

Esercizio 2. Siano $I \neq \emptyset$ un insieme di indici, $\{S_i\}_{i \in I}$ una famiglia di gruppi semplici non abeliani, e G loro il prodotto diretto. Per ogni sottoinsieme J di I si denoti con $G(J)$ il prodotto dei fattori con indice in J. Provare che ogni sottogruppo normale di G è uno di tali sottogruppi.

Esercizio 3. Si consideri la porzione di superficie S data dalla seguente parametrizzazione

$$(u, v) \longrightarrow \Big((1 + sinu)cosv, (2 + sinu)sinv, u\Big)$$

con $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, 2\pi)$.

(a) In ogni punto della porzione di superficie considerata determinare la prima e la seconda forma fondamentale.

(b) Determinare per quali punti della superficie la curvatura di Gauss è negativa, positiva, nulla.

(c) Determinare le curvature principali in ogni punto della superficie

(d) Discutere l'esistenza di punti ombelicali nella porzione di superficie considerata, ossia punti in cui le curvature principali sono uguali.

Esercizio 4. Sia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Si considerino $\mathbb{Z}$ e S^1 dotati delle usuali topologie, ossia discreta su $\mathbb{Z}$ e indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{C}$ su S^1. Si consideri l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \psi & : & \mathbb{Z} \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & & (n, z) & \mapsto & e^{\frac{2}{3}\pi i n} z \end{array}$$

(a) Si descriva il sottoinsieme $\psi(\mathbb{Z} \times \{1\})$.

(b) Si definisca su S^1 la seguente relazione di equivalenza: due punti $z, w \in S^1$ sono equivalenti, $z \sim w$, se esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(n, z) = w$. Si consideri il quoziente topologico $S^1/\sim$ e la proiezione

$$\begin{array}{ccccc} \pi & : & S^1 & \longrightarrow & S^1/\sim \\ & & z & \mapsto & [z] \end{array} .$$

Descrivere lo spazio quoziente.

(c) Discutere le proprietà della proiezione $\pi\colon S^1 \to S^1/\sim$. È aperta, è chiusa?

(d) Si determinino i gruppi fondamentali $\pi_1(S^1, 1)$ e $\pi_1(S^1/\sim, [1])$. Si scriva esplicitamente la mappa $\tilde{\pi}\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1/\sim, [1])$ indotta da π.

(e) Si consideri la mappa

$$\begin{array}{ccccc} \psi & : & \mathbb{Z} \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ & & (n, z) & \mapsto & e^{2\pi i n\sqrt{2}} z \end{array}$$

e le questioni indicate ai punti (a), (b), (c). Che conclusioni si possono trarre?

Esercizio 5. Se $(a_n)_n$ é una successione di numeri complessi, la trasformata Zeta di (a_n) é formalmente definita dalla serie

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(a) Determinare la trasformata Zeta della successione $a_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$, e il suo insieme di convergenza.

(b) Usare il risultato precedente per risolvere l'equazione alle differenze $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

Esercizio 6. Sia $R \geq 2$. Data la serie trigonometrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{R^k} \cos(kx), \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(a) Provare che la serie è totalmente convergente, per ogni $R \geq 2$.

(b) Determinare la somma.

Esercizio 7. Alessandro e Julien giocano ad una festa ad estrarre 3 pacchetti regalo indistinguibili da 2 diverse urne (senza avere la possibilita‘ di vedere cosa estraggono). Per semplicità indichiamo i tre regali della prima urna con i numeri 1, 2, 3 e quelli della seconda urna con i numeri 4, 5, 6. La probabilità di estrarre dalla prima urna il regalo numero 1 è uguale a quella di estrarre il regalo numero 3 ed è uguale a 0.2. Mentre per la seconda urna la probabilità è uniforme di estrarre i regali 4, 5, 6. Alessandro effettua una estrazione dalla prima urna e poi una dalla seconda urna. Sia Y la variabile aleatoria che indica la somma dei risultati delle due estrazioni.

(a) Calcolare la distribuzione di Y, la funzione di densità di massa di Y e disegnare il grafico della funzione di distribuzione di massa.

(b) Calcolare esplicitamente la funzione di distribuzione di Y e disegnare il suo grafico.

(c) Si consideri solo la prima urna per questo quesito. John vuole controllare l'affermazione "si estrae il 3 con probabilità 0.2", pertanto decide di ripetere le estrazioni con reiumbussolamento 35 volte e di annotare quante volte viene estratto il regalo a cui è associato il numero 3. Dai dati si evince che il regalo numero 3 esce 6 volte. Effettuare un test d'ipotesi a due code sapendo che $\alpha = 0.01$ per decidere se rifiutare o no l'ipotesi.

Esercizio 8. La variabile aleatoria X ha funzione di densità di probabilità $f(t)$ data dalla seguente:

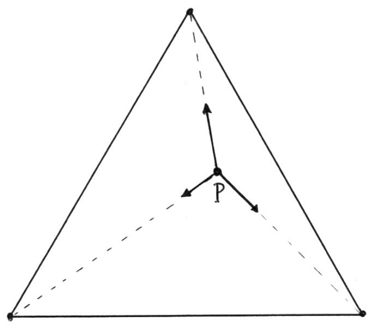
$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq -2 \\ ct^4 & \text{se} \quad -2 < t < 1 \\ \frac{12}{5} e^3 e^{-3t} & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Si calcoli la costante c che dia luogo a una funzione di densità ben definita.

(b) Si calcoli la funzione di ripartizione o funzione di probabilità cumulata di X.

(c) Si calcoli la speranza matematica di X.

Esercizio 9. Ciascun vertice di un triangolo equilatero di lato 2ℓ esercita su un punto materiale P di massa m una forza attrattiva e conservativa, la cui energia potenziale ha la forma $\frac{1}{2}U(d^2)$, dove d è la distanza di P dal vertice, e la funzione $U \in C^2\big([0, +\infty)\big)$ è tale che $U'' \geq 0$ e U' si annulla solo in 0. Il punto P è vincolato a stare nel piano contenente il triangolo.

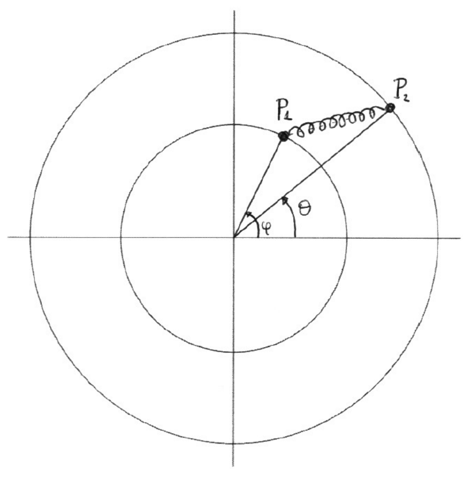


(a) si scrivano le equazioni di Lagrange di seconda specie del sistema;

(b) si calcolino le configurazioni di equilibrio, determinandone la stabilità;

(c) si calcolino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alle configurazioni di equilibrio stabile.

Esercizio 10. Due punti materiali, P_1 e P_2, entrambi di massa m, sono vincolati su due circonferenze concentriche di raggi r ed R (con $r \leq R$) e sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Le circonferenze sono contenute in un piano verticale, per cui sui due punti agisce anche la forza peso. Scelte le coordinate Lagrangiane φ e θ come in figura,



(a) si scrivano le equazioni di Lagrange di seconda specie del sistema;

(b) si discuta esistenza e stabilità dei punti di equilibrio del sistema.

Esercizio 11.

(a) Descrivere il metodo di Newton scalare e le sue proprietà di convergenza.

(b) Analizzare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza delle successioni costruite mediante il metodo di Newton per le seguenti funzioni:

$$f_1(x) = x^{2/3} \quad f_2(x) = |x|^{1/3},$$

per ogni funzione, costruire la successione delle iterate e valutare se converge alla radice cercata.

(c) In caso di convergenza specificare la velocità di convergenza della successione.

Esercizio 12. Sia dato il problema ai valori iniziali:

$$y'(t) = -10y(t) \quad t \geq 0$$

con condizione iniziale $y(0) = 1$.

(a) Descrivere il metodo di Eulero esplicito per la sua approssimazione numerica.

(b) Scrivere la relazione di ricorrenza generata dal metodo di Eulero esplicito per il problema considerato.

(c) Dire per quali valori di h il metodo numerico preserva il comportamento qualitativo della soluzione esatta. Motivare la risposta.

Esercizio 13. Una azienda deve spedire le sue merci in quattro località diverse e può attingere da tre depositi D_1, D_2 e D_3.

- In tabella è riportato il costo di spedizione di una unità di bene da ciascun deposito a ciascuna destinazione. Non è tecnicamente possibile spedire beni dal deposito D_2 alla località L_3.

	L_1	L_2	L_3	L_4
D_1	12	15	20	25
D_2	10	8		30
D_3	33	15	20	18

- I tre depositi D_1, D_2 e D_3, contengono rispettivamente 90, 45 e 30 unità di bene.
- Nelle località L_i, $i = 1, \ldots, 4$ devono giungere, rispettivamente, 30, 70, 30, 35 unità di bene.

(a) Determinare la strategia ottimale di spedizione in modo da minimizzare il costo complessivo (fornire la formulazione matematica del problema).

(b) Descrivere brevemente un procedimento per la risoluzione del risultante problema.

Prova di Ammissione al Corso di Dottorato di Ricerca in Matematica, Informatica e Statistica – XXXIII ciclo
Curriculum in Informatica
Prova n. 3

- **Rispondere in modo completo ed esauriente ad almeno 3 domande.**

1. Molti problemi reali possono essere ricondotti al problema di determinare il cammino più breve in un grafo orientato. Il candidato introduca il problema del cammino minimo e descriva un algoritmo per risolverlo.

2. Il candidato illustri le fasi di progettazione concettuale, logica e fisica di una base di dati.

3. L'accesso dei processi a risorse condivise può far sorgere conflitti e causare malfunzionamenti del sistema. Si descrivano le tecniche e le strutture dati utilizzate per prevenirli attraverso la sincronizzazione tra processi e le ulteriori problematiche introdotte da tali tecniche.

4. Il servizio di traduzione DNS è fondamentale per la infrastruttura web e internet. Si descrivano la architettura e le principali caratteristiche dei servizi e dei server DNS.

5. Il candidato fornisca una descrizione della nozione di NP-completezza, quindi illustri in dettaglio almeno due esempi di problemi NP-completi, soffermandosi anche sulla dimostrazione della loro NP-completezza.

6. Integrità e confidenzialità sono, assieme a disponibilità, tre proprietà auspicabili nella gestione dei dati secondo i principi della sicurezza informatica. Si descrivano i metodi e le tecnologie più rilevanti usati per assicurare la integrità dei dati e si forniscano esempi di loro applicazione.

PROVA DI AMMISSIONE AL CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA
IN MATEMATICA, INFORMATICA E STATISTICA – CICLO XXXIII

CURRICULUM IN STATISTICA

PROVA n. 3

1. Definire il coefficiente di correlazione di Pearson e le sue proprietà.
2. Si illustrino le principali proprietà della distribuzione Poisson.
3. Combinazione lineare di variabili aleatorie: distribuzione, media e varianza.
4. Definire il concetto di stimatore. Definire l'errore quadratico medio e illustrare il suo utilizzo.
5. Definire la funzione potenza di un test statistico e i concetti di test corretto e uniformemente più potente.
6. Scrivere un modello di regressione lineare con un regressore continuo e uno binario e la loro interazione. Interpretare i parametri.
7. Definire i concetti di indice di determinazione lineare (R^2) e di indice di determinazione lineare aggiustato. Discuterne le differenze e in quali contesti si applicano.
8. Il modello di durata esponenziale: specificare le funzioni di rischio e di sopravvivenza e illustrare le proprietà.
9. Definire il concetto di distribuzione a priori non informativa e fare un esempio.
10. Dimostrare la non distorsione dello stimatore della varianza con denominatore $n - 1$.